IV. Trigonometria

Szögek átváltása fokról radiánra és fordítva

2456. *a)* 180°; 90°; 60°; 45°; 22,5°. *b)* 120°; 150; 135°; 240°; 210°.

2457. *a)* 300°; 315°; 36°; 270°; 225°. *b)* $\frac{180°}{\pi} \approx 57{,}296°$; $\approx 143{,}239°$; $\approx 29{,}794°$; $\approx 162{,}72°$; $\approx 6{,}36°$.

2458. *a)* $\approx 114{,}59°$; $\approx 203{,}4°$; $\approx 16{,}33°$; $\approx 83{,}14°$; $\approx 307{,}11°$. *b)* $\approx 185{,}64°$; $\approx 138{,}60°$; $\approx 3129{,}50°$; $\approx 5729{,}58°$; $\approx 42{,}97°$.

2459. *a)* π; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}$. *b)* $2 \cdot \pi$; $\frac{3 \cdot \pi}{2}$; $\frac{5 \cdot \pi}{6}$; $\frac{3 \cdot \pi}{4}$; $\frac{2 \cdot \pi}{3}$.

2460. *a)* $\frac{2 \cdot \pi}{9}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{23 \cdot \pi}{36}$; $\frac{4 \cdot \pi}{3}$; $\frac{5 \cdot \pi}{3}$. *b)* $\frac{\pi}{15}$; $\frac{11 \cdot \pi}{36}$; $\frac{59 \cdot \pi}{90} \approx 2{,}6634$; 1,8368.

2461. *a)* $\frac{29 \cdot \pi}{144} \approx 0{,}6327$; 0,7965; 2,0644; 4,1681; 5,5318. *b)* $\approx 0{,}274$; $\approx 1{,}1796$; $\approx 1{,}5435$; $\approx 0{,}8860$; $\approx 0{,}1463$.

2462. 144°; $\approx 22{,}92°$; 220°; $\approx 72{,}48°$; 252°; 114,59°.

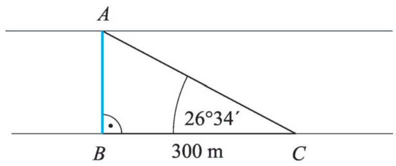
2463. $\approx 0{,}2653$; $\approx 1{,}7532$; $\approx 0{,}4296$; $\approx 0{,}2909$; $\frac{5 \cdot \pi}{3} \approx 5{,}2360$.

2464. *a)* $\frac{5 \cdot \pi}{12}$; $\frac{5 \cdot \pi}{36}$; $\frac{4 \cdot \pi}{9}$; $\frac{7 \cdot \pi}{12}$; $\frac{43 \cdot \pi}{36}$. *b)* $\frac{\pi}{5}$; $\frac{\pi}{18}$; $\frac{7 \cdot \pi}{4}$; $\frac{\pi}{36}$; $\frac{7 \cdot \pi}{3}$.

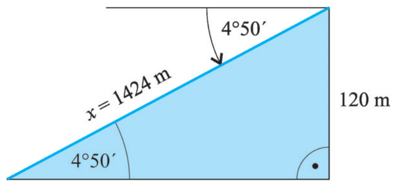
Hegyesszögű trigonometriai alapfeladatok

2465. $\approx 6{,}52$ cm a megadott szöggel szemközti befogó hossza.
2466. $\approx 25{,}2$ cm a megadott szög melletti befogó hossza.
2467. $\approx 4{,}69$ cm; $\approx 11{,}05$ cm a befogók hossza.
2468. ≈ 10 cm; $\approx 45{,}41$ cm a befogók hossza.
2469. $\approx 14{,}06$ cm az átfogó hossza; $\approx 11{,}35$ cm a keresett befogó hossza.
2470. $\approx 23{,}81$ m az átfogó hossza; $\approx 17{,}44$ m a keresett befogó hossza.
2471. $\approx 8{,}75$ dm a másik befogó hossza.
2472. $\approx 12{,}07$ cm a másik befogó hossza.
2473. $\approx 6{,}75$ cm; $\approx 27{,}06$ cm a háromszög ismeretlen oldalainak a hossza.
2474. $\approx 18{,}36$ dm; $\approx 25{,}23$ dm a háromszög ismeretlen oldalainak a hossza.
2475. $\approx 84{,}56$ cm; $\approx 91{,}6$ cm a háromszög ismeretlen oldalainak a hossza.
2476. $\approx 18{,}79$ m; $\approx 61{,}63$ m a háromszög ismeretlen oldalainak a hossza.
2477. 30° az adott befogóval szemközti szög.
2478. $\approx 19{,}47°$ az adott befogóval szemközti szög.
2479. $\approx 65{,}42°$ a keresett hegyesszög nagysága.
2480. $\approx 20{,}67°$ az ismert befogóval szemközti szög.
2481. 30°; 60° a háromszög ismeretlen szögei.
2482. $\approx 83{,}62°$ az ismeretlen oldallal szemközti szög, ha az ismeretlen oldal befogó. Ha pedig átfogó, akkor 90° az ismeretlen oldallal szemközti szög.

2503.



2504.



2483. 30°; 60° a háromszög ismeretlen szögei.
2484. ≈ 41,81° az adott befogóval szemközti szög.
2485. ≈ 28,4° a lejárat hajlásszöge a vízszinteshez képest.
2486. ≈ 1,43° az emelkedés szöge.
2487. ≈ 1,49 m magasról érkezik a lejtő.
2488. ≈ 4,43 m a lejtő hossza; ≈ 4,04 m a lejtő vízszintesre eső merőleges vetülete.
2489. ≈ 13,6° szöget zár be a fallal a létra.
2490. ≈ 25 m magas a torony.
2491. ≈ 2,25 m magasra visz a lejtő.
2492. ≈ 7,06 m távol kezdődjön a feljáró.
2493. ≈ 26° a lépcsősor hajlásszöge a vízszinteshez képest, kissé pontosabban ≈ 25,96°
2494. ≈ 10 %-os az emelkedő.
2495. ≈ 6°50′ szöggel hajlik az út a vízszinteshez képest.
2496. ≈ 1°31′ szöget zár be a huzal a vízszintessel.
2497. ≈ 4,30 cm a téglalap ismeretlen oldalának a hossza.
2498. ≈ 13,13 cm, illetve ≈ 5,66 cm a téglalap oldalainak hossza.
2499. ≈ 53 m magas a templomtorony. Mint a fizikából tudjuk, a beesési szög a beesési merőleges és a beeső fénysugár hajlásszöge.
2500. ≈ 19°39′-es szöget zárnak be a napsugarak a talajjal. Itt nem a beesési szöget keressük, hanem annak pótszögét.
2501. ≈ 67,38° a napsugarak beesési szöge a talajhoz képest. Itt a beesési szöget keressük.
2502. ≈ 55 m széles a folyó.
2503. $AB \approx 150$ m a folyó szélessége.
2504. ≈ 1424 m távol van tőlünk légvonalban a vitorlás.
2505. $a \approx 3{,}26$ m; $b \approx 15{,}35$ m; $c \approx 6{,}81$ m; $d \approx 16{,}47$ m a négyszög oldalainak a hossza.
2506. *a)* $x \approx 6{,}37$ cm; $y \approx 10{,}02$ cm; $z \approx 17{,}17$ cm a négyszög ismeretlen oldalhosszai.
b) $x \approx 5{,}17$ cm; $y \approx 6{,}80$ cm a négyszög ismeretlen oldalhosszai; $\beta \approx 106°42'$ az ismeretlen szög nagysága.

Hegyesszög megszerkesztése valamely szögfüggvényének értékéből

2507. Megfelelő derékszögű háromszögeket kell szerkesztenünk. Például az *a)* feladatnál szerkesszünk egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek 1 egység az átfogója és egyik befogója $\frac{1}{2}$ egység! Ekkor az $\frac{1}{2}$ egység hosszúságú befogóval szemközti szög szinusza éppen $\frac{1}{2}$.

A *c)* feladatnál $\sqrt{2}$ hosszúságú szakaszt könnyen szerkesztünk, ha veszünk egy 1 egység szárhosszúságú egyenlő szárú derékszögű háromszöget. A *d)* feladatnál nincsen olyan szög, amelynek szinusza 2 lenne.

2508. Hasonlóan járunk el, mint az előző feladatnál. A *b)* feladatnál szakaszt könnyen harmadolhatunk, ha emlékszünk a párhuzamos szelők tételére. A *c)* feladatnál nincs olyan szög, amelynek koszinusza $\frac{3}{2}$ lenne. A *d)* feladatnál $\frac{\sqrt{3}}{2}$ egység hosszúságú szakaszt könnyen szerkeszthetünk, ha tekintjük az egységnyi oldalhosszúságú szabályos háromszög magasságát.

IV

2509. Hasonlóan járunk el, mint az előző két feladatnál. A *d)* feladatnál $\sqrt{5}$ hosszúságú szakaszt például úgy szerkeszthetünk, hogy egy kör átmérőjének vesszük az 1 + 5 egység hosszúságú szakaszt, majd merőlegest állítunk a két szakasz közös pontjában az átmérőre. E merőleges egy pontban metszi a kört. Ezen pont és az átmérő két végpontja derékszögű háromszöget alkot. Miért? Ezután alkalmazzuk a magasságtételt a derékszögű háromszögre és megkapjuk a $\sqrt{5}$ hosszúságú szakaszt.

2510. Hasonlóan járunk el, mint az előző három feladatnál.

2511. Hasonlóan járunk el, mint az előző négy feladatnál.

Nevezetes hegyesszögek szögfüggvényei

2512. *a)* 2; *b)* $\sqrt{3} - 1$; *c)* 1; *d)* 2 a kifejezések pontos értéke.

2513. *a)* 1; *b)* 8; *c)* 1; *d)* $\sqrt{3}$ a kifejezések pontos értéke.

2514. *a)* 4; *b)* 1; *c)* 3 a kifejezések pontos értéke.

2515. *a)* $\frac{5}{4}$; *b)* $\frac{1}{4}$; *c)* $\frac{3}{2}$; *d)* $\frac{3}{8}$ a kifejezések pontos értéke.

2516. *a)* ; $2 - \sqrt{3}$ *b)* 2 a kifejezések pontos értéke.

2517. *a)* $\frac{\sqrt{6}}{2}$; *b)* $5 - 2 \cdot \sqrt{6}$ a kifejezések pontos értéke.

Hegyesszögű trigonometriai feladatok

Egyenlő szárú háromszögek

2518. ≈ 2,8 cm az egyenlő szárú háromszög alapja.

2519. ≈ 28,2° a kettőslétra nyílásszöge.

2520. $x \approx 174{,}5$ cm magasan állunk a talajhoz képest.

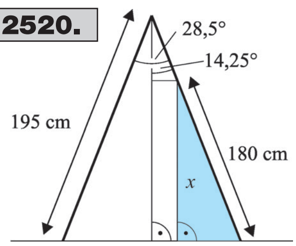
2521. ≈ 14,51° szöget zár be a fonálinga a két szélső helyzet között.

2522. ≈ 20,88 cm a kúp alapkörének átmérője.

2523. ≈ 26,85° a kúp nyílásszöge.

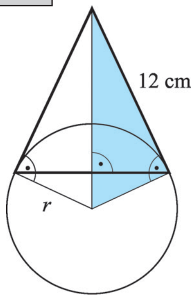
2524. ≈ 9,5 cm az alapkör sugara.

2520.

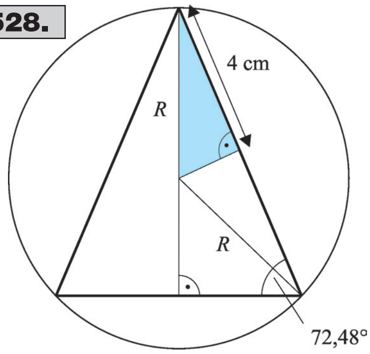


IV

2525.



2528.



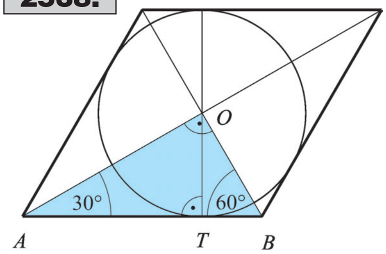
2525. $r \approx 9{,}61$ cm a kör sugara.
2526. Az alap és a szár hajlásszöge $\approx 55{,}96°$, míg a szárak hajlásszöge $\approx 68{,}08°$. Vegyük figyelembe az ismert tételt, miszerint a háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást és ez a pont éppen a háromszögbe írható kör középpontja. Vegyük azt a derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója az alap fele, míg a másik befogója a kör sugara.
2527. $r \approx 2{,}62$ cm. Vegyük figyelembe az előző feladat megoldásához való útmutatást.
2528. $R \approx 4{,}2$ cm. Először számítsuk ki a szárak hajlásszögét! Bocsássunk merőleges szakaszt a körülírt kör középpontjából a háromszög egyik szárára! Majd vegyük észre, hogy ezen szög fele szerepel az ábrán megjelölt derékszögű háromszögben. E háromszögre felírt megfelelő szögfüggvény segítségével kiszámíthatjuk a körülírt kör sugarát.
2529. $r \approx 5{,}06$ cm a beírt kör sugara és $R \approx 10{,}8$ cm a körülírt kör sugara. Mint tudjuk a háromszög szögfelezője átmegy a beírt kör középpontján. Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelyiknek egyik befogója az alap fele, másik befogója a beírt kör sugara. Ekkor ezzel a beírt kör sugárral szemközti szög 34°-os az előzőek miatt. Megfelelő szögfüggvénnyel kiszámíthatjuk a beírt kör sugarát ezen derékszögű háromszögből. Tekintsük most azt a másik derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója az alap fele, míg másik befogója az alaphoz tartozó magasság! Ekkor megfelelő szögfüggvényt felírva ezen derékszögű háromszögre, kiszámíthatjuk a derékszögű háromszög átfogóját, ami nem más, mint az eredeti háromszög szára. Ezután tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelyet az előző feladat megoldási útmutatásában jelöltünk meg. Kiszámítjuk ezen derékszögű háromszög megfelelő szögét, ami nem más, mint az eredeti háromszög szárai szögének a fele. Ezután a megfelelő szögfüggvényt alkalmazva a megjelölt háromszögre, kiszámíthatjuk az eredeti háromszög köré írható kör sugarát.

Téglalapok, rombuszok, paralelogrammák

2530. **1. eset:** $\approx 1{,}57$ m a téglalap ismeretlen oldala. Ha az átlók hajlásszögével szemben a téglalap ismeretlen oldala van, akkor húzzunk párhuzamost az átlók metszéspontján át a téglalap adott oldalával!
2. eset: $\approx 13{,}49$ m a téglalap ismeretlen oldala. Ha az átlók hajlásszögével szemben a téglalap ismert oldala van, akkor húzzunk párhuzamost az átlók metszéspontján át a téglalap ismeretlen oldalával!
2531. $\approx 7{,}19$ cm hosszú az átlók hajlásszögével szemközti oldal hossza, míg $\approx 22{,}48$ cm hosszú a téglalap másik oldala. Húzzunk párhuzamost az átlók metszéspontján át a téglalap „másik” oldalával!
2532. $\approx 26{,}19$ m; $\approx 9{,}38$ m a téglalap oldalai. Írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt a két oldalból, mint befogóból álló derékszögű háromszögre! Majd írjuk fel a téglalap területképletét! Ezután oldjuk meg a két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszert!

2533. $\approx 7{,}55$ cm hosszú a rombusz oldala, $\approx 69{,}49°$ és $\approx 110{,}51°$ a rombusz szögei.
2534. $\approx 30{,}2$ cm hosszú a rombusz oldala, míg $\approx 22{,}63$ cm hosszú a rombusz ismeretlen átlója.
2535. 60° és 120° a rombusz szögei.
2536. $\approx 34{,}77$ dm a rombusz oldala. Mint tudjuk a rombusz átlói felezik a szögeit. Írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt az átlók által négy derékszögű háromszögre osztott rombusz egyik derékszögű háromszögére. Másrészt az oldal és a kisebbik átló összegéből kapunk egy második egyenletet. Oldjuk meg a két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszert!
2537. $\approx 13{,}64$ cm a rombusz oldalhossza.

2538.

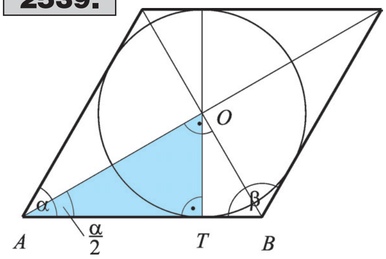


2538. $a = \dfrac{8\cdot\sqrt{3}}{3} \approx 4{,}62$ cm a rombusz oldala. Vegyük figyelembe, hogy $OT = 2$ cm, majd az ATO derékszögű háromszögre alkalmazzunk egy megfelelő szögfüggvényt. Ennek segítségével kiszámíthatjuk, hogy $AT = 2\cdot\sqrt{3}$. Majd a BTO derékszögű háromszögre írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt és ebből megkaphatjuk, hogy $BT = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$. Ezután

$$a = AT + BT = \frac{8\cdot\sqrt{3}}{3}.$$

2539. $\alpha \approx 73{,}74°$ és $\beta \approx 106{,}26°$ a rombusz szögei, $a = 5$ cm a rombusz oldalának hossza, $t = 24\text{ cm}^2$ a rombusz területe. $AB = a$. A Pitagorasz-tétel segítségével: $BO = \sqrt{a^2 - 4^2}$.
(1) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{OT}{AO} = \dfrac{2{,}4}{4}$; másrészt (2) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2-4^2}}{a}$, ezekből $\dfrac{\sqrt{a^2-4^2}}{a} = \dfrac{2{,}4}{4}$. (Ezen egyenletet hasonló háromszögek segítségével is indokolhatjuk.) Ebből $a = 5$ cm. Másrészt (1)-ből kaphatjuk az α szöget, ebből pedig a β szöget. A területet a és r segítségével könnyen kaphatjuk.
2540. **1. eset:** $e = 40$ m; $f = 42$ m a két átló hossza. $\alpha \approx 87{,}2°$ és $\beta \approx 92{,}8°$. Határozzuk meg a rombusz oldalának hosszát: $a = 29$ m. A rombusz területéből kaphatjuk ez első egyenletet. Majd Pitagorasz tételéből kaphatjuk a második egyenletet. A két egyenletből álló egyenletrendszerből egy másodfokú egyenletet kapunk. A szögeket megfelelő szögfüggvények segítségével kaphatjuk.
A **2. eset** ugyanaz, mint az első, csak megfordítva vannak az átlók hosszai és a szögek.
2541. $\approx 6{,}36$ cm. Húzzuk be a magasságot az ismeretlen oldal egyik végpontjából!
2542. $\approx 1100{,}66\text{ cm}^2$ a paralelogramma területe. Alkalmazzuk azt a háromszög területképletet, amely a két oldal és a közbezárt szög segítségével adja meg a háromszög területét. A paralelogramma átlói négy egyenlő területű háromszögre vágják a paralelogrammát. Mint tudjuk egy háromszög súlyvonala két egyenlő területű részre osztja a háromszöget. Miért?
2543. $t = \dfrac{e\cdot f\cdot\sin\varphi}{2}$ a paralelogramma területe. Vegyük figyelembe az előző feladat megoldásának útmutatását!

2539.



IV

Szabályos sokszögek

2544. $\approx 13{,}86$ cm a szabályos háromszög oldala. Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelyben az átfogó a kör sugara, míg az egyik befogó a szabályos háromszög oldalának a fele!
2545. $\approx 8{,}23$ cm a szabályos ötszög oldala. Nem kell lerajzolni a szabályos ötszöget a körbe írva, hanem elég egy oldalára épített háromszöget lerajzolni, amelynek harmadik csúcspontja a körülírt kör középpontja. Ezen egyenlő szárú háromszög szárai által bezárt szögét megkapjuk, ha 360°-ot elosztjuk a szabályos sokszög oldalszámával. Itt 72°-os középponti szöget kaptunk. Húzzuk be az egyenlő szárú háromszög magasságát, ez felezi a középponti szöget!
2546. $\approx 11{,}52$ cm a kör sugara. Vegyük figyelembe az előző útmutatást!
2547. $\approx 7{,}31$ cm a kör sugara. Vegyük figyelembe a 2545. feladat megoldásához való útmutatást!
2548. $\approx 84{,}3$ cm^2 a szabályos ötszög területe. Először számítsuk ki az ötszög köré írható kör sugarát az előbbi módon: $\approx 5{,}95$ cm. Majd alkalmazzuk a háromszög azon területképletét, amely a háromszög két oldalának és a közbezárt szögüknek a segítségével adja meg a háromszög területét. A szabályos ötszög területe ötször akkora, mint a megfelelő egyenlő szárú háromszög területe.
2549. $\approx 1086{,}4$ cm^2 a szabályos nyolcszög területe. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.
2550. $\approx 492{,}43$ cm^2 a szabályos tízszög területe. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.
2551. $\approx 92{,}97$ cm a kerülete és $\approx 669{,}04$ cm^2 a területe a szabályos tizenegyszögnek. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előzőeket.
2552. $\approx 62{,}22$ cm a kerülete és $\approx 302{,}07$ cm^2 a területe a szabályos tizenháromszögnek. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előzőeket.
2553. $\approx 394{,}04$ cm^2 a területe és $\approx 72{,}89$ cm a kerülete a szabályos hétszögnek. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előzőeket.
2554. $\approx 20{,}61$ cm a beírt és $\approx 21{,}93$ cm a körülírt kör sugara. A beírt kör sugara éppen a megfelelő egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága. Míg az átfogója éppen a körülírt kör sugara.
2555. $\approx 12{,}19$ cm a beírt és $\approx 15{,}07$ cm a körülírt kör sugara.
2556. $\approx 8{,}15$ cm az oldal hossza. Először a háromszög szinuszos területképletéből számítsuk ki a szabályos hétszög köré írható kör sugarát: $\approx 9{,}39$ cm.
2557. $\approx 7{,}43$ cm az oldal hossza. Először a háromszög szinuszos területképletéből számítsuk ki a szabályos tizenkétszög köré írt kör sugarát: $\approx 14{,}35$ cm.
2558. $\approx 43{,}26$ cm a kerülete, $\approx 128{,}73$ cm^2 a területe a szabályos ötszögnek. Először számítsuk ki a szabályos ötszög szögeit: 108°-ot kapunk. Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelynek átfogója az ötszög egyik oldala, egyik befogója az átló fele: 7 cm , és a 7 cm-rel szemközti szög az ötszög szögének a fele: 54°. Ebből kiszámíthatjuk az ötszög oldalhosszát: $\approx 8{,}65$ cm. Ebből kapjuk a kerületet. Míg a szabályos ötszög területét hasonlóan számíthatjuk ki, mint ahogyan az előző feladatok szabályos sokszögeinek a területét számítottuk. Keressünk másik megoldást! Például azt észrevéve, hogy ha az ötszög egyik csúcsából meghúzzuk a két átlót, akkor e két átló három egyenlő nagyságú szögre osztotta fel a szabályos ötszög 108°-os szögét. Miért? Folytassuk!
2559. *a)* $\approx 4{,}34$ cm az oldala, $\approx 30{,}37$ cm a kerülete, $\approx 68{,}41$ cm^2 a területe a szabályos hétoldalú húrsokszögnek.
b) $\approx 4{,}82$ cm az oldala, $\approx 33{,}71$ cm a kerülete, $\approx 84{,}29$ cm^2 a területe a szabályos hétoldalú érintősokszögnek.
2560. *a)* $k_n = 2 \cdot n \cdot r \cdot \sin\frac{180°}{n}$ vagy másképpen $k_n = 2 \cdot n \cdot r \cdot \sin\frac{\pi}{n}$ az r sugarú körbe írt n oldalú szabályos húrsokszög kerülete. $t_n = n \cdot r^2 \cdot \sin\frac{180°}{n} \cdot \cos\frac{180°}{n}$, illetve $t_n = n \cdot r^2 \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \cos\frac{\pi}{n}$

az r sugarú körbe írt n oldalú szabályos húrsokszög területe. Akik már most ismerik a kétszeres szögek szinuszára vonatkozó azonosságot, azok könnyen megmutathatják, hogy e képletek más formája: $t_n = \frac{n \cdot r^2}{2} \cdot \sin\frac{360°}{n}$, illetve $t_n = \frac{n \cdot r^2}{2} \cdot \sin\frac{2 \cdot \pi}{n}$. *b)* $K_n = 2 \cdot n \cdot r \cdot \mathrm{tg}\frac{180°}{n}$, illetve $K_n = 2 \cdot n \cdot r \cdot \mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$ az r sugarú kör köré írt n oldalú érintősokszög kerülete. $T_n = n \cdot r^2 \cdot \mathrm{tg}\frac{180°}{n}$, illetve $T_n = n \cdot r^2 \cdot \mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$ az r sugarú kör köré írt n oldalú érintősokszög területe. *c)* $k_n < k_{\text{kör}} < K_n$, vagyis $2 \cdot n \cdot r \cdot \sin\frac{180°}{n} < k_{\text{kör}} < 2 \cdot n \cdot r \cdot \mathrm{tg}\frac{180°}{n}$. $t_n < t_{\text{kör}} < T_n$, vagyis $\frac{n \cdot r^2}{2} \cdot \sin\frac{360°}{n} < t_{\text{kör}} < n \cdot r^2 \cdot \mathrm{tg}\frac{180°}{n}$. *d)* Ha a kör kerületét ismertnek vesszük, akkor egy becslést kaphatunk π-re, az előző eredményeket felhasználva. $2 \cdot n \cdot r \cdot \sin\frac{180°}{n} < k_{\text{kör}} < 2 \cdot n \cdot r \cdot \mathrm{tg}\frac{180°}{n}$, vagyis $2 \cdot n \cdot r \cdot \sin\frac{180°}{n} < 2 \cdot r \cdot \pi < 2 \cdot n \cdot r \cdot \mathrm{tg}\frac{180°}{n}$. Ebből $n \cdot \sin\frac{180°}{n} < \pi < n \cdot \mathrm{tg}\frac{180°}{n}$. Ha ide behelyettesítjük a feladatban javasolt $n = 180$-at, akkor azt kapjuk, hogy $180 \cdot \sin 1 < \pi < 180 \cdot \mathrm{tg}\, 1$ (itt az 1 radiánban van), ebből $3{,}141\,43 < \pi < 3{,}141\,92$ becslést kaphatjuk. Amúgy $\pi = 3{,}141\,592\,65...$ irracionális szám.

2561. $T_{\text{gyűrű}} = \pi \cdot T_n \cdot \frac{\mathrm{tg}\frac{180°}{n}}{n}$ a körgyűrű területe. Vegyük észre, hogy $T_{\text{gyűrű}} = T_{\text{kör}} - t_{\text{kör}}$, ha alkalmazzuk Pitagorasz tételét, akkor kaphatjuk, hogy $T_{\text{gyűrű}} = \frac{a^2}{4} \cdot \pi$, ahol a azon szabályos n-szög oldalának hossza, amely köré írt kör területe $T_{\text{kör}}$, míg a beírt körének területe $t_{\text{kör}}$.

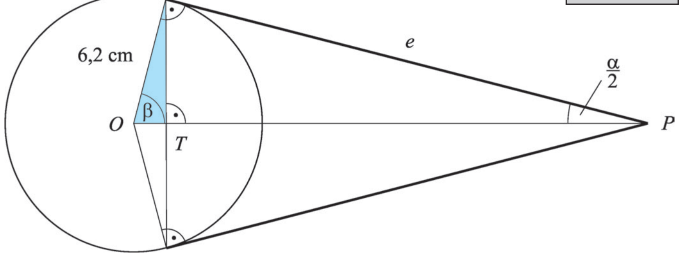
Körök érintői, körívek, körcikkek, körszeletek, húrok

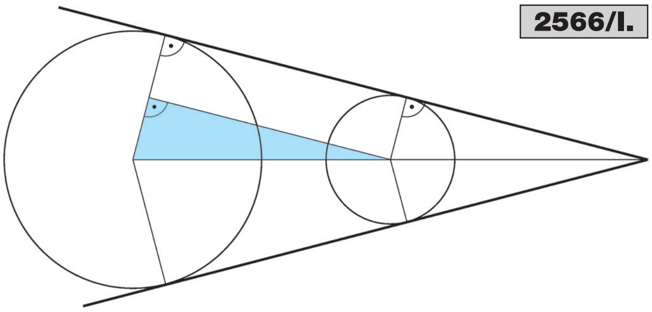
2562. $\approx 0{,}42$ m a lámpa átmérője. A 6,5 m távolság legyen egy megfelelő derékszögű háromszög átfogója. Míg a gömb sugara legyen ezen derékszögű háromszög egyik befogója, amellyel szemközti szög fele akkora, mint a megadott szög.

2563. $\approx 3462{,}7$ km a Hold átmérője. (Ez csak egy becslés, a Hold átmérője pontosabban kb. ≈ 3476 km.) Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

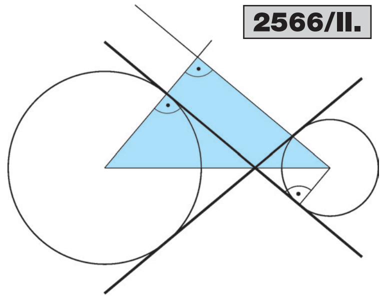
2564. $\approx 54{,}98°$ az érintők hajlásszöge és $\approx 11{,}92$ cm az érintőszakaszok hossza. Az ETO háromszögben $ET = 5{,}5$ cm, megfelelő szögfüggvényt felírva megkapjuk a β szöget: $\beta \approx 62{,}51°$.

2564.





2566/I.



2566/II.

Ebből kaphatjuk az $\frac{\alpha}{2}$ szöget, ebből pedig az $\alpha \approx 54{,}98°$ szöget. Például az *ETP* háromszögre megfelelő szögfüggvényt felírva kapjuk, hogy $e \approx 11{,}92$ cm.

2565. $\approx 45{,}2$ cm a *P* pont távolsága a kör középpontjától, $\approx 42{,}63$ cm az érintőszakasz hossza, $\approx 28{,}3$ cm az érintési pontok távolsága. Hasonló ábrát készítve, mint az előző feladatnál, szögfüggvények segítségével megoldhatjuk a feladatot.

2566. *a)* $\approx 19{,}19°$ a külső érintők hajlásszöge. Tekintsük 2566/I. ábrán megjelölt derékszögű háromszöget, amelynek egyik megfelelő hegyesszöge éppen a külső érintők hajlásszögének a fele. *b)* $\approx 75{,}34°$ a belső érintők hajlásszöge. Tekintsük a 2566/II. ábrán megjelölt derékszögű háromszöget!

2567. $\approx 39{,}22°$ az érintők hajlásszöge. Mutassuk meg, hogy $\varepsilon = \beta + \gamma$ (β és γ az érintők közös átmérővel bezárt szöge!) Megfelelő derékszögű háromszögekre felírt szögfüggvényekből könnyen kaphatjuk β, illetve γ értékeit. $\beta \approx 16{,}6°$ és $\gamma \approx 22{,}62°$.

2568. $h \approx 12{,}72$ cm a húr hossza.

2569. $\approx 7{,}25$ m a kör sugara. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2570. $\approx 109{,}27°$ a keresett középponti szög. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.

2571. ≈ 8 cm. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előzőeket.

2572. $\approx 44{,}05°$ a keresett középponti szög.

2573. $\approx 40{,}23°$ a keresett kerületi szög. Használjuk fel a kerületi és középponti szögek tételét.

2574. $\approx 29{,}2$ cm a húr hossza. Használjuk fel a kerületi és középponti szögek tételét.

2575. $\approx 4{,}56$ cm a körülírt kör sugara.

2576. $\approx 41{,}54°$ a keresett kerületi szög nagysága.

2577. $\approx 3{,}875$ m a kör sugara.

2578. $\approx 232{,}04$ m a keresett húr hossza. Először az ívhossz képletének segítségével számítsuk ki a kör sugarát: $\approx 204{,}73$ m.

2579. $\approx 21{,}64$ dm a húr hossza. Először az ívhossz képletének segítségével számítsuk ki a húrhoz tartozó középponti szöget: $\approx 121{,}52°$.

2580. $\approx 10{,}04$ m a húr hossza. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2581. $\approx 1{,}94$ m^2 a körszelet területe. Vegyük észre, hogy a körszelet területét megkapjuk, hogy ha a megfelelő körcikk területéből kivonjuk a megfelelő háromszög területét. A körcikk területe: $\approx 9{,}88$ m^2, míg a háromszög területe: $\approx 7{,}94$ m^2.

2582. $\approx 47{,}9$ cm^2 a körszelet területe. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot. A középponti szög nagysága $\approx 77{,}36°$, a körcikk területe $\approx 172{,}82$ cm^2, a háromszög területe $\approx$ 124,9 cm^2.

2583. $\approx 77{,}4$ cm^2 a körszelet területe. A kör sugara $\approx 13{,}42$ cm, a húr hossza $\approx 21{,}25$ cm, a körcikk területe $\approx 164{,}52$ cm^2, a háromszög területe $\approx 87{,}12$ cm^2.

2584. $\approx 64{,}21$ cm^2 az egyik körszelet területe és $\approx 642{,}65$ cm^2 a másik körszelet területe.
A húrhoz pontosan 90°-os középponti szög tartozik.

2585. $\approx 8{,}4\%$ a kisebbik körszelet területe a körlemez területének. Először számítsuk ki a kisebbik körszelethez tartozó középponti szög felét, ebből kapjuk a középponti szöget. Majd határozzuk meg a megfelelő háromszög területét: $\approx 161{,}85\ \text{cm}^2$. A körcikk területe $\approx 247{,}46\ \text{cm}^2$. Ezekből kapjuk a körszelet területét: $\approx 85{,}61\ \text{cm}^2$. Ebből és a kör területéből kaphatjuk a megfelelő százalékos eredményt.

Trapézok

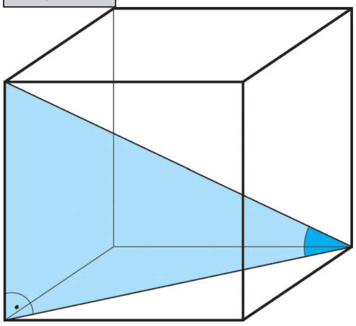
2586. $\approx 36{,}6$ cm a trapéz másik alapja, míg $\approx 21{,}97$ cm a trapéz másik szára. Húzzuk meg a trapéz magasságát a kisebbik alap azon csúcsából, amelyiknél a tompaszög van.
2587. $\approx 3{,}81$ cm hosszú a trapéz derékszögű szára, $\approx 3{,}81$ cm a trapéz merőleges szára, illetve $\approx 5{,}59$ cm hosszú a trapéz másik szára, $\approx 39{,}43\ \text{cm}^2$ a trapéz területe. Hasonlóan indulunk el, mint az előző feladatnál. A derékszögű szár meghatározása után – mivel ez éppen a trapéz magassága –, felírhatjuk a trapéz területének képletét.
2588. $\approx 12{,}77$ cm a másik szár hossza és $\approx 8{,}07$ cm a másik alap hossza. Hasonlóan indulhatunk el, mint az előző két feladatnál.
2589. $\approx 21{,}51$ cm a trapéz másik szára, $\approx 20{,}85$ cm a trapéz másik szárának hossza, $\approx 431{,}3\ \text{cm}^2$ a trapéz területe. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző három feladatot.
2590. $\approx 8{,}32$ cm a trapéz hosszabbik alapja, $\approx 2{,}33$ cm a trapéz rövidebbik alapja, $\approx 9{,}98$ cm az egyik szár, $\approx 7{,}984$ cm a trapéz másik szára. Legyen a a hosszabbik alap, míg c a rövidebbik alap hossza, $m = d$ a trapéz magassága, illetve a merőleges szár hossza, b a másik szárának a hossza. A trapéz területképletét felírva és 2-vel szorozva kapjuk, hogy (1) $85 = (a + c) \cdot m$. Másrészt a rövidebbik alap másik végpontjából is meghúzva a magasságot kapunk egy derékszögű háromszöget, amelyből $m = b \cdot \sin 53{,}13°$, azaz (2) $m \approx 0{,}8 \cdot b$. Pitagorasz tételét felírva kapjuk, hogy (3) $(a - c)^2 + m^2 = b^2$. Legyen a rövidebbik átló hossza e. A feltétel szerint $e = a$. Ismét Pitagorasz tételét alkalmazva kapjuk, hogy $m^2 + c^2 = e^2$, illetve az előzőt figyelembe véve (4) $m^2 + c^2 = a^2$. A (2) és a (4) egyenletekből, most már egyenlőségjeleket használva a közelítő egyenlőségeknél is, kapjuk, hogy (5) $a - c = 0{,}6 \cdot b$. Az (1) és (2) egyenletekből kaphatjuk, hogy (6) $106{,}25 = (a + c) \cdot b$. Az (5) és a (6) egyenletekből kaphatjuk, hogy (7) $a^2 - c^2 = 63{,}75$. Ámde a (4) egyenletből következik, hogy $a^2 - c^2 = m^2$, használjuk fel a (2) egyenletet: (8) $a^2 - c^2 = 0{,}64 \cdot b^2$. Ezt összevetve a (7) egyenlettel, kapjuk, hogy: $b \approx 9{,}98$ cm. Majd (2)-ből kapjuk $m = d$-t. Tekintsük a b alapú és a szárhosszúságú egyenlő szárú háromszöget, amelynek az alapon fekvő szöge az adott $53{,}13°$-os szög. Ebben egy megfelelő szögfüggvényt alkalmazva megkapjuk az a hosszúságot. Majd a (8) egyenletből kapjuk c-t.
2591. $\approx 66{,}04°$, illetve $\approx 113{,}96°$ a szimmetrikus trapéz szögei. Húzzuk be a rövidebbik alap végpontjainál a két magasságot!
2592. $\approx 63{,}43°$, illetve $\approx 116{,}57°$ a szimmetrikus trapéz szögei. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.
2593. $\approx 30{,}96°$ a töltés oldalának a hajlásszöge a vízszinteshez képest.
2594. **1. eset:** $\approx 7{,}04$ m a másik alap hossza. Az 1. esetben a trapéz nagyobbik alapja az adott 24 m-es alap. **2. eset:** $\approx 40{,}96$ m másik alap hossza. A 2. esetben a trapéz rövidebbik alapja az adott 24 m hosszú alap.
2595. **1. eset:** $\approx 8{,}13$ cm a másik alap hossza. **2. eset:** $\approx 51{,}86$ cm a másik alap hossza. Az első esetben a hosszabbik alap az adott alap, míg a második esetben a rövidebbik alap az adott alap.
2596. $\approx 89{,}44$ m a szár hossza, 110 m a másik alapja, $\approx 63{,}43°$ az egyik szöge, míg $\approx 116{,}57°$ a másik szöge. Húzzuk be a rövidebbik alap végpontjainál a magasságokat és keressünk megfelelő derékszögű háromszögeket.
2597. $\approx 85{,}55\ \text{cm}^2$ a trapéz területe, $\approx 19{,}46°$ az átló alappal bezárt szöge.
2598. $\approx 33{,}25$ cm a hosszabbik alap hossza, $\approx 14{,}75$ cm a rövidebbik alap hossza, $\approx 20{,}24$ cm a szárak hossza.

2599. **1. eset:** Ha az egyenlő szárú trapéz szimmetrikus trapéz. $\approx 28{,}4$ cm a hosszabbik alap, $\approx 13{,}6$ cm a rövidebbik alap, $\approx 14{,}1$ cm a szárak hossza.
2. eset: Ha az egyenlő szárú trapéz paralelogramma. 21 cm a trapéz alapjainak hossza, $\approx 14{,}1$ cm a trapéz szárainak hossza.
2600. $\approx 19{,}79°$ a félkúpszög. Tekintsük a csonkakúp tengelyét tartalmazó síkot, amely szimmetrikus trapézt vág ki a csonkakúpból! A trapéz rövidebbik alapjának végpontjaiból húzzuk meg a trapéz magasságait! Tekintsük az egyik megfelelő derékszögű háromszöget! Ennek egyik hegyesszöge éppen a félkúpszög.
2601. $\approx 52{,}9$ %-kal nagyobb az alaplap sugara, mint a fedőlapé. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.
2602. $\approx 91{,}4$ cm a másik alap hossza, $\approx 3994{,}6\ \text{cm}^2$ a trapéz területe.
2603. $R \cdot \sqrt{3}$ a trapéz negyedik oldalának hossza, 75°, illetve 105° a trapéz szögei.Vegyük észre, hogy a trapéz rövidebbik alapjának két végpontja és a körülírt kör középpontja szabályos háromszöget alkot. Másrészt a trapéz szárának két végpontja és a kör középpontja által alkotott egyenlő szárú háromszögnek húzzuk meg a trapéz szárához, mint alaphoz tartozó magasságát. Ekkor meghatározhatjuk, a trapéz szárához tartozó középponti szög felét, illetve a középponti szöget. 90°-os ez a középponti szög. Ezután meghatározhatjuk a trapéz hosszabb alapjához tartozó középponti szöget: 120°. Innen már könnyen kaphatjuk a trapéz szögeit.
2604. $\approx 53{,}13°$ illetve $\approx 126{,}87°$ a trapéz szögei, 32 egység a hosszabbik alap hossza, 20 egység a trapéz szára. Használjuk fel azt az egyszerű tételt, miszerint egy körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak. Ezt alkalmazva kapjuk, hogy a szár hossza egyenlő az alapok összegének a felével. Húzzuk be szokás szerint a rövidebb alap végpontjaiból a trapéz magasságát. Az egyik kapott derékszögű háromszögre írjuk fel Pitagorasz tételét! Ebből kaphatjuk a hosszabbik alap hosszát, majd a szár hosszát számíthatjuk ki. Szögfüggvénnyel kaphatjuk a trapéz kisebbik szögét.
2605. $\approx 7{,}78$ cm a trapéz rövidebbik alapja, $\approx 8{,}02$ cm a trapéz másik szára. A trapéz rövidebbik alapjának két végpontjaiból húzzuk meg a trapéz magasságát! Kaptunk két derékszögű háromszöget, amelyekből könnyen meghatározhatjuk a keresett oldalakat.
2606. $\approx 23318{,}4\ \text{m}^2$ a trapéz területe. Húzzuk be a rövidebbik alap két végpontjából a trapéz magasságát!
2607. **1. eset:** Ha a 42 cm-es szár mellett van a 73,6°-os szög. $\approx 67{,}37$ cm a trapéz másik alapja, $\approx 49{,}71$ cm a trapéz másik szára, $\approx 1889\ \text{cm}^2$ a trapéz területe.
2. eset: Ha a trapéz 42 cm-es szára mellett az 54,15°-os szög van. $\approx 61{,}02$ cm a trapéz másik alapja, $\approx 35{,}48$ cm a trapéz másik szára, $\approx 1487{,}9\ \text{cm}^2$ a trapéz területe.
2608. **1. eset:** Ha a 81,2 cm-es szár mellett a 48,6°-os szög van. $\approx 153{,}21$ cm a másik alap, $\approx 86{,}14$ cm a másik szár, $\approx 5841{,}57\ \text{cm}^2$ a trapéz területe.
2. eset: Ha a 81,2 cm-es szár mellett a 45°-os szög van. $\approx 146{,}64$ cm a másik alap, $\approx 76{,}55$ cm a másik szár, $\approx 5318{,}24\ \text{cm}^2$ a trapéz területe.
2609. $\approx 24{,}63$ cm az ismeretlen oldal hossza, $\approx 76{,}31°$, illetve $\approx 103{,}69°$ a trapéz szögei.
2610. $\approx 46{,}7$ cm, illetve $\approx 49{,}03$ cm a trapéz szárai.
2611. $\approx 71{,}04°$, illetve $\approx 35{,}76°$ a trapéz hegyesszögei, $\approx 108{,}96°$, illetve $\approx 144{,}24°$ a trapéz másik két szöge, $\approx 1908{,}36\ \text{m}^2$ a trapéz területe.
2612. $\approx 1637{,}35\ \text{cm}^2$ a trapéz területe. Vegyük észre, hogy a trapéz kisebbik alapja éppen középvonal a kialakuló nagy háromszögben. Ezért a háromszög középvonalára vonatkozó tételből kapjuk, hogy hossza fele az 58 cm-es alapnak. A két alap között állítsunk fel egy egyenletet, amelyből meghatározhatjuk a magasságot. Ezután kaphatjuk a területet.
2613. $\approx 75{,}52°$, $\approx 104{,}48°$, $\approx 28{,}96°$, $\approx 151{,}04°$ a trapéz szögei. Húzzuk be a trapéz magasságát a rövidebbik oldal két végpontjából! Írjunk fel két Pitagorasz-tételt a keletkező két derékszögű háromszögre. Majd alkalmazzunk megfelelő szögfüggvényt a derékszögű háromszögekre!

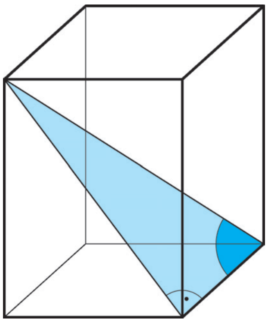
Térelemek hajlásszöge

2614. $\approx 35{,}26°$ a testátló hajlásszöge az oldallapokkal.
2615. *a)* $\approx 74{,}24°$ a testátló hajlásszöge egy szomszédos alapéllel (2615/I.). *b)* $\approx 22{,}58°$ a testátló hajlásszöge egy szomszédos oldaléllel (2615/II.). *c)* $\approx 67{,}41°$ a testátló hajlásszöge az alaplappal (2615/III.). *d)* $\approx 15{,}76°$ a testátló hajlásszöge az oldallappal (2615/IV.).
2616. *a)* $\approx 74{,}98°$-os szöget zár be a testátló a 3 cm-es éllel, $\approx 64{,}41°$-os szöget zár be a testátló az 5 cm-es éllel, $\approx 30{,}25°$-os szöget zár be a testátló a 10 cm-es éllel. *b)* $\approx 59{,}75°$-os szöget zár be a testátló a 3 cm $\times$ 5 cm-es oldallappal, $\approx 15{,}02°$-os szöget zár be a testátló az 5 cm $\times$ 10 cm-es oldallappal, $\approx 25{,}59°$-os szöget zár be a testátló a 3 cm $\times$ 10 cm-es oldallappal.
2617. $\approx 8{,}81$ cm a gúla magassága.
2618. *a)* $\approx 40°$ az oldalél és az alaplap hajlásszöge. Tekintsük az előző feladat útmutatását! *b)* $\approx 49{,}9°$ az oldallap és az alaplap hajlásszöge. Tekintsük a következő ábrát!
2619. *a)* $\approx 53{,}28°$ az oldalélnek az alaplappal bezárt szöge. Először számítsuk ki a felszínből egy oldallap területét, ez 105 cm^2, majd számítsuk ki az oldallap alapélhez tartozó magasságát, ez 15 cm. Ezután Pitagorasz tételének segítségével kiszámíthatjuk a gúla magasságát, ez $\approx 13{,}27$ cm. *b)* $\approx 62{,}18°$ az oldallap alaplappal bezárt szöge.

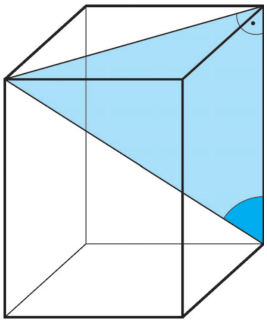
2614.



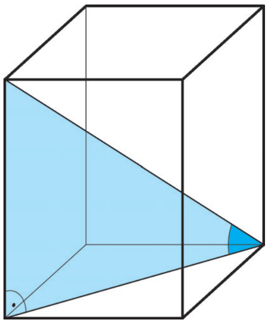
2615/I.



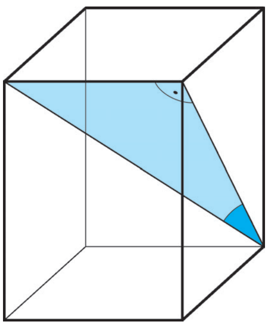
2615/II.



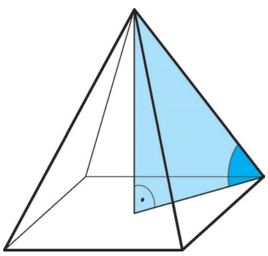
2615/III.



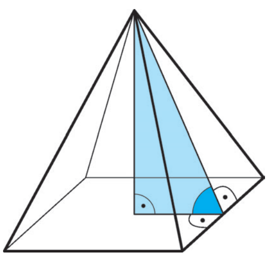
2615/IV.



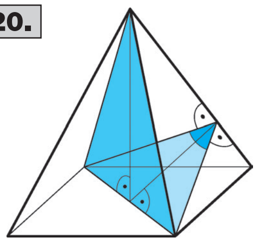
2617.



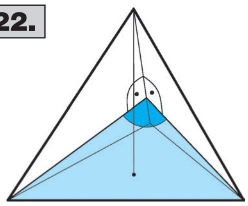
2618.



2620.



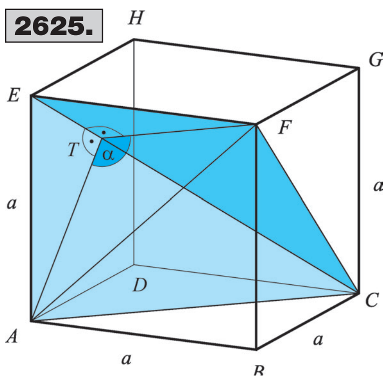
2622.



2620. *a)* $\approx 69{,}63°$ az alapél szomszédos oldaléllel bezárt szöge. *b)* $\approx 68{,}20°$ az oldallap alaplappal bezárt szöge. *c)* $\approx 60{,}50°$ az oldalél alaplappal bezárt szöge. *d)* $\approx 48{,}96°$ két szomszédos oldallap hajlásszöge. A korábban meghatározott oldallapmagasságból, amely az alapélhez tartozik, Pitagorasz tételének segítségével meghatározhatjuk a gúla oldalélének hosszát: $\approx 11{,}49$ cm, míg az előző oldallapmagasság $\approx 10{,}77$ cm. Írjuk fel kétféleképpen az oldallap területét, egyrészt az alapélhez tartozó oldallapmagassággal, másrészt az oldallap szárához, azaz a gúla oldaléléhez tartozó oldalélmagassággal! Ebből meghatározhatjuk az oldalélhez tartozó oldallapmagasságot, ez $\approx 7{,}50$ cm. Ezen két megfelelő oldalélhez tartozó oldalélmagasság által bezárt szög éppen a két oldallap hajlásszöge, amelyet a következő ábrán jelöltünk meg. A továbbiakban húzzuk be ezen egyenlő szárú háromszög magasságát, amely felezi a keresett szöget. A kapott egybevágó derékszögű háromszögek bármelyikéből meghatározhatjuk a keresett szöget.

2621. $\approx 70{,}53°$ a szabályos tetraéder két oldallapjának hajlásszöge. Vegyük figyelembe, hogy a magasság talppontja éppen az alaplap súlypontja. Másrészt ismert tétel szerint a háromszög súlypontja $2:1$ arányban osztja fel a súlyvonalakat úgy, hogy az oldalhoz közelebbi rész a kisebb. Egyszerűbb megoldás felé indulhatunk, ha meghúzzuk két oldallap magasságát.

2625.



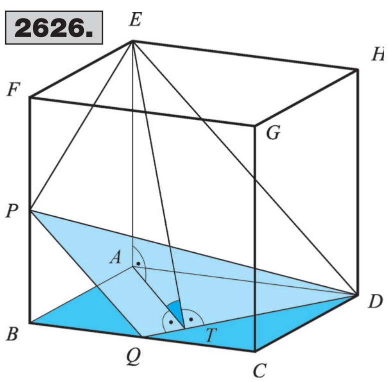
2622. *a)* $\approx 74{,}66°$ az alapél szomszédos oldaléllel bezárt szöge. *b)* $\approx 80{,}89°$ az alaplap és egy oldallap hajlásszöge. *c)* $\approx 72{,}22°$ az oldalél és az alaplap hajlásszöge. *d)* $\approx 62{,}41°$ két oldallap hajlásszöge. Hasonló módon oldhatjuk meg, mint a 2620. *d)* feladatot.

2623. $\approx 63{,}61°$ az oldallapnak az alaplappal bezárt szöge.

2624. *a)* $\approx 73{,}64°$ az alapél szomszédos oldaléllel bezárt szöge. *b)* $\approx 55{,}71°$ az oldalél alaplappal bezárt szöge. *c)* $\approx 59{,}44°$ az alaplap oldallappal bezárt szöge. *d)* $\approx 129{,}03°$ két szomszédos oldallap hajlásszöge.

2625. $\alpha = 120°$. Mutassuk meg, hogy az ACE háromszög egybevágó a CEF háromszöggel. Ebből következik, hogy az A-ból, illetve az F-ből induló magasságaik talppontja egybeesik.
$AT = FT = x$. Írjuk fel az ACE háromszög területét kétféleképpen! Ebből megkaphatjuk, hogy: $x = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$.
Tekintsük az ATF egyenlő szárú háromszöget és húzzuk meg T-ből ezen háromszög AF alapjához tartozó magasságát! Ez felezi a keresett szöget. Kapunk két egybevágó derékszögű háromszöget. Az egyikre felírt megfelelő szögfüggvényből megkaphatjuk a keresett szög felét, s így a keresett szöget is.

2626.



2626. $\approx 48{,}19°$ a két sík hajlásszöge. A DPQ sík az ED szakaszban metszi az $ADHE$ oldallapot, míg az $ABFE$ oldallapot a PE szakaszban metszi. $PQDE$ négyszög egy szimmetrikus trapéz. Miért? Az A-ból és E-ből a QD-re bocsátott merőlegesek talppontja azonos: a T pont. Miért? Így az ATE szög az $ABCD$ és a DPQ síkok hajlásszöge. Az ATD háromszög hasonló a QCD háromszöghöz. Miért? Mivel e két háromszög hasonló, ezért megfelelő oldalaik aránya egyenlő. Azaz $\frac{AT}{AD}=\frac{DC}{DQ}$, ebből kaphatjuk, hogy $AT=\frac{2\cdot a}{\sqrt{5}}$, ahol a a kocka élének hossza, persze előbb kiszámítjuk a DQ hosszát a kocka élével kifejezve. Másrészt $\operatorname{tg} ATE\sphericalangle=\frac{AE}{AT}==\frac{\sqrt{5}}{2}$; ebből kaphatjuk a keresett szöget. $ATE\sphericalangle\approx 48{,}19°$.

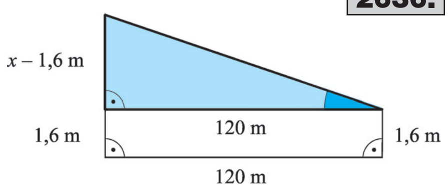
Vegyes, illetve összetettebb hegyesszögű trigonometriai feladatok

Vegyes feladatok

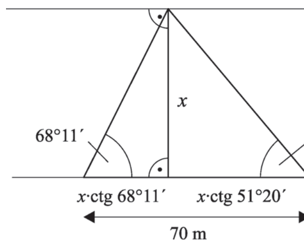
2627. $\approx +32{,}2$ m-rel van magasabban a végpont, mint a kiindulási pont.
2628. $\approx 454{,}7$ m az út valódi hossza.
2629. $\approx 605{,}3$ m a tereppontok közötti út hossza és $\approx 7{,}59°$ az út emelkedési szöge.
2630. ≈ 282 m az út valódi hossza.
2631. $\approx 201{,}2$ m az ABC út hossza, $\approx 9{,}46°$ az AB út hajlásszöge, $\approx 4{,}09°$ a BC út hajlásszöge.
2632. 51 N az eredő erő nagysága, $\approx 61°55'$-os szöget zár be az eredő erő iránya a 24 N-os erő irányával.
2633. $\approx 3°\,24'$ a menetemelkedés szöge. Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója a csavarmenet kerületének hossza (középkerülete), míg másik befogója a menetemelkedés, és a menetemelkedéssel szemközti hegyesszöget keressük.
2634. $\approx 4{,}94$ mm a menetemelkedés. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.
2635. $\approx 3°\,46'$ a menetemelkedés szöge.
2636. ≈ 32 m az épület magassága.
2637. ≈ 80 m messze van a két épület egymástól. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.
2638. *a)* $\approx 26{,}57°$, illetve $\approx 18{,}43°$ a keresett két szög. *b)* $\approx 18°\,26'$, $\approx 15°15'$, illetve $\approx 11°19'$ a keresett három szög.
2639. *a)* $\approx 41{,}42$ cm, illetve $\approx 58{,}58$ cm a keresett két hosszúság. *b)* $\approx 26{,}79$ cm, $\approx 30{,}95$ cm, illetve $\approx 42{,}26$ cm a keresett három hosszúság.
2640. $\approx 343{,}92\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Győr középpontjának sebessége a Föld tengelye körüli forgásban. Először számítsuk ki, hogy mekkora sugarú körpályán kering a város, ez $\approx 4716{,}12$ km. Majd alkalmazzuk az itt érvényes $\text{sebesség}=\frac{\text{út}}{\text{idő}}$ összefüggést.
2641. $\approx 58{,}3$ m széles a folyó. Fejezzük ki x-szel a 70 m-es szakasz két rész szakaszát, ezeket adjuk össze, 70 m-t kapunk és ebből az egyenletből kiszámíthatjuk x-et.

$$x=\frac{70}{\operatorname{ctg} 68'11''+\operatorname{ctg} 51°20'},\ x\approx 58{,}3\text{ m.}$$

2636.



2641.

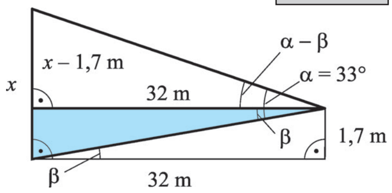


IV

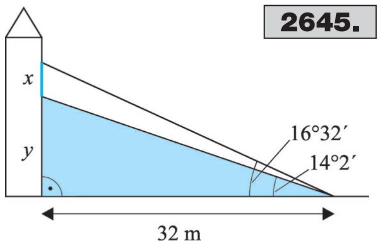
Tornyok, hegycsúcsok és egyéb magasan levő tárgyak

2642. ≈ 220 m magas a toronyantenna.
2643. $\approx 20{,}14$ m magas a nyárfa. Először számítsuk ki a β szöget, ez $\approx 3{,}041°$. Ebből $\alpha - \beta = 33° - 3{,}041° \approx 29{,}959°$. Majd számítsuk ki az $x - 1{,}7$ m-t, és ebből kapjuk, hogy $x \approx 20$ m. $x - 1{,}7 = 32 \cdot \operatorname{tg} 29{,}959 \Rightarrow \approx 20{,}14$ m.
2644. ≈ 33 m magas a markotabödögei templomtorony. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.
2645. $x \approx 1{,}5$ m hosszú az ablak. Először számítsuk ki y értékét, ez ≈ 8 m. Majd az $x + y$ befogójú derékszögre felírva egy megfelelő szögfüggvényt, ebből megkaphatjuk x értékét.
2646. $x \approx 16$ m magas a kápolna. Először számítsuk ki az y értékét, ez $\approx 31{,}06$ m. Majd számítsuk ki z értékét, ez $\approx 115{,}91$ m. (Persze a sorrend fordított is lehet.) Ezután írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt az $x + y$ befogójú derékszögű háromszögre, ebből megkaphatjuk x-et, vagyis a kápolna magasságát.
2647. $x \approx 354{,}5$ m magasan van a hegytető a völgy fölött. Írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt az x és y befogójú derékszögű háromszögre, majd írjunk fel egy hasonló egyenletet, az $x + 24$ m és y befogójú derékszögű háromszögre. Ekkor két egyenletünk van két ismeretlennel. Ha elosztjuk egymással a két egyenlet megfelelő oldalait, akkor y kiesik, s így marad x-re egy törtes elsőfokú egyenlet, amelyet könnyen megoldhatunk. Így kaphatjuk, hogy $x \approx 354{,}5$ m.
2648. $z \approx 61{,}8$ m hosszú drótkötélre van szükség. Számítsuk ki x-et egy megfelelő szögfüggvényt alkalmazva, az x befogójú és 48,5 m átfogójú derékszögű háromszögre. Kapjuk, hogy $x \approx 44{,}81$ m. Majd számítsuk ki az y értékét, kapjuk, hogy $y \approx 18{,}56$ m. (Fordított sorrendben is dolgozhatunk.) Majd Pitagorasz tételének segítségével kiszámíthatjuk z-t, azaz a drótkötél hosszát.
2649. $x \approx 74{,}4$ m széles a folyó. Alkalmazzunk egy megfelelő szögfüggvényt a 18 m, illetve az $x + 50$ m hosszú befogókkal rendelkező derékszögű háromszögre, ebből kiszámíthatjuk x-et, vagyis a folyó szélességét.
2650. $x \approx 420$ m magasan van a hegycsúcs a folyó felett. Az x és y befogójú derékszögű háromszögre írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt, majd ugyanígy írjunk fel egy ugyanolyan szögfüggvényt az x és $y + 350$ m befogójú

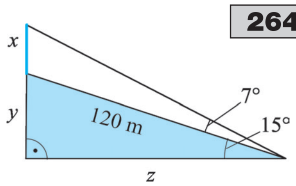
2643.



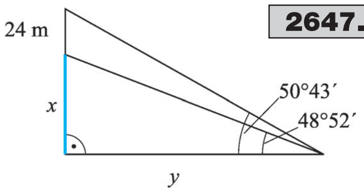
2645.



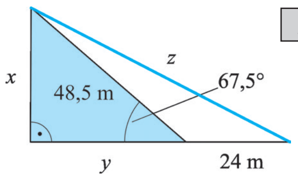
2646.



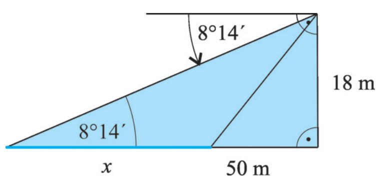
2647.



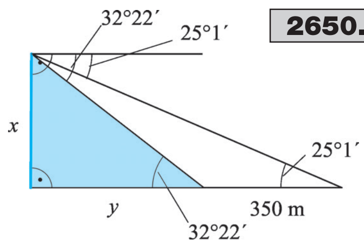
2648.



2649.



2650.

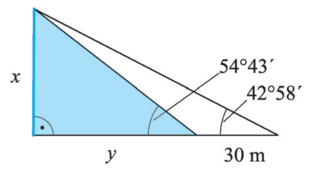


derékszögű háromszögre. A kapott két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszert oldjuk meg és megkapjuk x értékét. Az egyenletrendszer megoldását például úgy is elvégezhetjük, hogy elosztjuk a két egyenlet megfelelő oldalait egymással, majd ekkor x kiesik és y-ra kapunk egy egyismeretlenes egyenletet. Ebből meghatározzuk y-t, majd ezt visszahelyettesítjük az eredeti két egyenlet valamelyikébe, és ebből kifejezhetjük x-et.

$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} 32°22' \Rightarrow x = y \cdot \operatorname{tg} 32°22'$, $\frac{x}{y+350} = \operatorname{tg} 25°1' \Rightarrow$

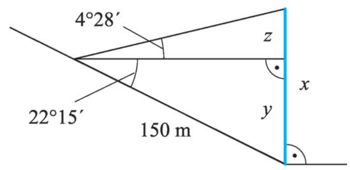
$\Rightarrow x = (y + 350) \cdot \operatorname{tg} 25°1'$, $y \approx 550$ m, $x \approx 420$ m.

2651.



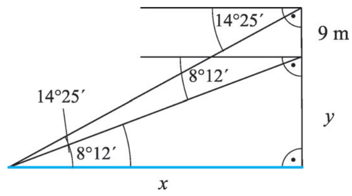
2651. $x \approx 82$ m magas az antenna. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2652.



2652. $x \approx 27$ m magas a templomtorony. Mindkét derékszögű háromszögre írjunk fel egy-egy megfelelő szögfüggvényt. Ezen egyenletekből külön-külön megkapjuk y, illetve a z értékét. $y \approx 4{,}34$ m és $z \approx 22{,}62$ m. Ezeket összeadva kapjuk a templomtorony x magasságát.

2653.

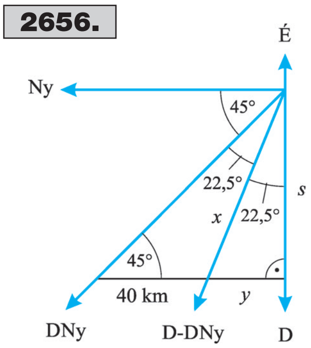


2653. $x \approx 79$ m széles a folyó. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint a 2650., illetve a 2651. feladatot.

2654. $\approx 9{,}86$ m magasan van az első ablak és $\approx 19{,}86$ m magasan a második ablak, $\approx 429{,}2$ m távolságban a tereppont. Készítsünk hasonló ábrát, mint az előző feladatnál, és oldjuk meg hasonlóan a feladatot, mint a 2650., 2651., illetve 2653. feladatot.

2655. $x \approx 134$ m. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint a 2650., 2651., 2653., illetve a 2654. feladatot. Írjunk fel két megfelelő szögfüggvényt az $x - 25$ m és y befogójú derékszögű háromszögre, majd az x és y befogójú derékszögű háromszögre! Ezután oldjuk meg a két egyenletből álló egyenletrendszert például úgy, hogy elosztjuk az egyenletek megfelelő oldalait egymással, ekkor y kiesik és a kapott törtes egyenletből x kifejezhető!

2656.



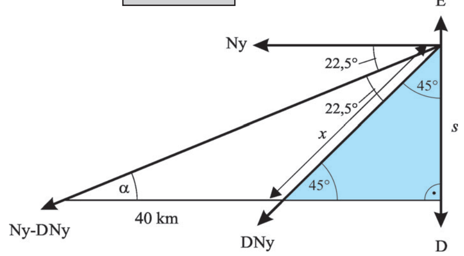
2656. $v \approx 34{,}14 \, \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a hajó sebessége.

Vegyük észre, hogy $s = 40 \text{ km} + y$, másrészt $\frac{y}{s} = \operatorname{tg} 22{,}5°$.

E kétismeretlenes két egyenletből álló egyenletrendszerből meghatározhatjuk az s értékét. $s \approx 68{,}28$ km.

Majd az $s = v \cdot t$ egyenletből kaphatjuk a v sebességet.

2657.



2657. $v \approx 28{,}3 \, \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a hajó sebessége.

Számítsuk ki az α szöget, ez 22,5°. Vegyünk észre egy alkalmas egyenlő szárú háromszöget, amelyből következtessünk arra, hogy $x = 40$ km! Alkalmazzunk egy megfelelő szögfüggvényt az s befogójú és x átfogójú derékszögű háromszögre! Ebből kiszámíthatjuk, hogy $s \approx 28{,}3$ km. Majd az $s = v \cdot t$ egyenletből kaphatjuk a v sebességet.